SUR LA TORSION DANS LA COHOMOLOGIE DES VARI ETES DE SHIMURA DE KOTTWITZ-HARRIS-TAYLOR

Pascal Boyer

▶ To cite this version:

Pascal Boyer. SUR LA TORSION DANS LA COHOMOLOGIE DES VARI ETES DE SHIMURA DE KOTTWITZ-HARRIS-TAYLOR. Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, 2019. hal-01137273v2

HAL Id: hal-01137273

https://hal.science/hal-01137273v2

Submitted on 31 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LA TORSION DANS LA COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE SHIMURA DE KOTTWITZ-HARRIS-TAYLOR

par

Pascal Boyer

Résumé. — Lorsque le niveau en l d'une variété de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor n'est pas maximal, sa cohomologie à coefficients dans un $\overline{\mathbb{Z}}_l$-système local n'est en général pas libre. Afin d'obtenir des énoncés d'annulation de la torsion, on localise en un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de l'algèbre de Hecke. Nous prouvons alors un énoncé d'annulation de la torsion de ces localisés, reposant soit sur $\mathfrak{m}$ directement, soit sur la représentation galoisienne $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ qui lui est associée. En ce qui concerne la torsion, dans un cadre bien moins général que [**6**], nous obtenons de même que la torsion ne fournit pas de nouveaux systèmes de paramètres de Satake, en prouvant que toute classe de torsion se relève dans la partie libre de la cohomologie d'une variété d'Igusa.

Abstract **(Torsion in the cohomology of Kottwitz-Harris-Taylor Shimura varieties)**
When the level at l of a Shimura variety of Kottwitz-Harris-Taylor is not maximal, its cohomology with coefficients in a $\overline{\mathbb{Z}}_l$-local system isn't in general torsion free. In order to prove torsion freeness results of the cohomology, we localize at a maximal ideal $\mathfrak{m}$ of the Hecke algebra. We then prove a result of torsion freeness resting either on $\mathfrak{m}$ itself or on the Galois representation $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ associated to it. Concerning the torsion, in a rather restricted case than [**6**], we prove that the torsion doesn't give new Satake parameters systems by showing that each torsion cohomology class can be raised in the free part of the cohomology of a Igusa variety.

Introduction

Dans [**12**], K.-W. Lan et J. Suh prouvent un résultat très général sur l'absence de torsion dans la cohomologie d'une variété de Shimura PEL compacte à valeur dans un $\overline{\mathbb{Z}}_l$-système local. Pour obtenir un résultat aussi général, les données doivent vérifier un certain nombre d'hypothèses

— sur le système local qui est supposé très régulier au sens de la définition 7.18 de [**12**],

---

Classification mathématique par sujets **(2010).** — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.
Mots clefs. — classes de cohomologie de torsion, variété de Shimura, faisceau pervers, représentation automorphe.

— sur l qui doit être bon au sens de la définition 2.3 de [**12**] et donc suffisamment grand relativement au poids du système local considéré et

— sur le niveau en l supposé maximal, i.e. la variété de Shimura est non ramifiée en l.

Ces hypothèses sont loin d'être superflues comme pourra le noter le lecteur en considérant, par exemple, un niveau qui est un pro-l-sous-groupe d'Iwahori en l, et un système local régulier $V_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi}$ tel que $V_{\overline{\mathbb{F}}_l,\xi}$ possède des vecteurs invariants par le sous-groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures. Alors

— d'une part la cohomologie de $V_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ est concentrée en degré médian et donc son H^0 est nul;

— d'autre part le H^0 de $V_{\overline{\mathbb{Z}}_l,\xi} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$ correspond aux vecteurs invariants sous le pro-l-sous groupe d'Iwahori en l qui est donc non nul.

De ces deux faits, on en déduit que la torsion du H^1 est non nulle. En ce qui concerne le système local trivial, considérons la suite exacte

$$0 \to H^1\Big(G, H^0(X, \overline{\mathbb{F}}_l)\Big) \longrightarrow H^1(Y, \overline{\mathbb{F}}_l) \longrightarrow H^1(X, \overline{\mathbb{F}}_l)^G$$

où $X \to Y$ est un revêtement galoisien de groupe de Galois G, que l'on applique dans le cas où

— X est une variété de Shimura géométriquement connexe de sorte que $H^0(X, \overline{\mathbb{F}}_l) \simeq \overline{\mathbb{F}}_l$,

— G est de la forme $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^e$ et

— $H^1(Y, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est nul.

Ainsi comme $H^1\Big((\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^e, \overline{\mathbb{F}}_l\Big)$ est non nul, on en déduit que la torsion de $H^2(Y, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ est non nulle. L'exemple le plus simple pour obtenir ces conditions consiste à prendre une variété de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor pour $U(2,1)$ et deux niveaux intermédiaires pour que G soit de la forme voulue, cf. [**14**] théorème 3.4.

À la vue de ces exemples, il semble clair que si on veut une annulation de la torsion lorsque le niveau en l augmente, il est raisonnable de localiser la cohomologie en un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de l'algèbre de Hecke agissant sur la cohomologie. D'après [**13**], est associée à tel $\mathfrak{m}$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$-représentation galoisienne $\overline{\rho}_\mathfrak{m}$ et on cherche des conditions sur $\mathfrak{m}$ ou sur $\overline{\rho}_\mathfrak{m}$, pour que la localisation de la cohomologie en $\mathfrak{m}$ soit sans torsion. Des résultats dans ce sens sont obtenus dans [**7**], via la théorie de Hodge l-adique de la fibre spéciale en l de la variété de Shimura dans le cas où celle-ci est de Kottwitz-Harris-Taylor.

Dans ce travail on s'intéresse à la même question mais à partir de l'étude de la cohomologie de la fibre spéciale en une place au dessus de $p \neq l$ en utilisant les calculs explicites de [**3**]. On montre alors deux cas d'annulation de la torsion dans la cohomologie d'une variété de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor X_I de niveau I et de dimension relative $d-1$, à coefficients dans un système local $V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}$ associé à une représentation irréductible algébrique ξ, selon que la condition porte, théorème 4.7, sur les paramètres de Satake modulo l, i.e. sur $\mathfrak{m}$ directement, ou, théorème 4.18, sur la représentation galoisienne $\overline{\rho}_\mathfrak{m}$ associée.

Théorème A *Supposons qu'il existe une place v non ramifiée pour les données, cf. la notation 4.1, telle que le multi-ensemble des paramètres de Satake modulo l en v associé* *à* $\mathfrak{m}$ *ne contient aucun sous-multi-ensemble de la forme* $\{\alpha, q_v\alpha\}$ *où* q_v *est le cardinal du corps résiduel en* v. *Alors pour tout* i, *les localisés* $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ *sont sans torsion.*

Théorème B *Supposons qu'il existe un sous-corps* $k \subset \overline{\mathbb{F}}_l$ *tel que* $SL_n(k) \subset \overline{\rho}_{\mathfrak{m}}(G_F) \subset \overline{\mathbb{F}}_l^\times GL_n(k)$. *Alors si* $l \geq d+2$, *les localisés* $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ *sont sans torsion pour tout* i.

Remarque : le théorème B est l'une des formes que peut prendre le théorème 4.18 qui utilise une hypothèse tirée de [**7**] et qui est aussi vérifiée si $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est induit d'un caractère du groupe de Galois d'une extension K/F galoisienne cyclique.

En ce qui concerne la torsion, nous obtenons deux types de contraintes pour son existence :

— son apparition dans le localisé en $\mathfrak{m}$ du i-ème groupe de cohomologie, implique des restrictions sur le multi-ensemble des paramètres de Satake modulo l en toute place non ramifiée, cf. la proposition 4.10.

— Si on considère le plus petit groupe de cohomologie où le localisé en $\mathfrak{m}$ n'est pas libre, alors pour une sous-représentation galoisienne irréductible de cette torsion, l'action du Frobenius en toute place non ramifiée n'admet pas beaucoup de valeurs propres distinctes, cf. la proposition 4.14. En particulier si on cherche des représentations galoisiennes irréductibles sans valeur propre multiple pour l'action des Frobenius, leur dimension est majorée explicitement, cf. le corollaire 4.15, selon le principe que plus on s'éloigne du degré médian, plus la majoration est contraignante.

— Dans un cadre beaucoup plus simple que celui de [**6**], on montre que, pour tout $\mathfrak{m}$ apparaissant dans la cohomologie, le système de paramètres de Satake associé est la réduction modulo l d'un système apparaissant dans la partie libre de la cohomologie d'une variété d'Igusa sur une strate de Newton. Dans l'esprit de [**13**], on peut alors associer, d'après [**9**], à un tel système, une représentation galoisienne dont la réduction modulo l est telle qu'aux places non ramifiées, les frobenius annulent le polynôme de Hecke associé à $\mathfrak{m}$, cf. le théorème 4.16. Cependant on notera bien que comme dans [**6**] et contrairement à [**13**], on n'obtient rien de nouveau.

Pour l'essentiel, les arguments reposent sur les calculs explicites de [**3**] des groupes de cohomologie des strates de Newton ; ces résultats sont rappelés au §3.

Les résultats de ce papier et notamment le théorème 4.7 devraient, à l'instar du corollaire 3.5.1 de [**7**], permettre de prouver la partie poids de Serre de la conjecture de [**10**] pour $U(d-1,1)$, tout comme [**7**] le fait pour $U(2,1)$. Il faudrait pour ce faire généraliser les résultats de [**8**].

L'auteur remercie vivement Benoît Stroh pour nos nombreuses discussions et en particulier pour les exemples de classes de cohomologie de torsion évoquées dans l'introduction. Enfin je remercie le rapporteur anonyme qui a permis de corriger coquilles, mal-dits et erreurs de la version initialement soumise.

Table des matières

Introduction 1
1. Géométrie de quelques variétés de Shimura unitaires 4

2. Représentations automorphes cohomologiques 6
3. Rappels sur la $\overline{\mathbb{Q}}_l$-cohomologie d'après [**3**] 9
4. Localisation de la cohomologie 12
Références 19

1. Géométrie de quelques variétés de Shimura unitaires

Dans la suite l et p désigneront deux nombres premiers distincts. Soit $F = F^+E$ un corps CM avec $E/\mathbb{Q}$ quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$. Pour v une place de F, on notera

— F_v le complété du localisé de F en v,
— $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de F_v,
— ϖ_v une uniformisante et
— q_v le cardinal du corps résiduel $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/(\varpi_v)$.

1.1. Hypothèse. — *On supposera dans la suite que l est non ramifié dans E.*

Soit B une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 telle qu'en toute place x de F, B_x est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose B munie d'une involution de seconde espèce $*$ telle que $*_{|F}$ est la conjugaison complexe c. Pour $\beta \in B^{*=-1}$, on note $\sharp_\beta$ l'involution $x \mapsto x^{\sharp_\beta} = \beta x^* \beta^{-1}$ et $G/\mathbb{Q}$ le groupe de similitudes, noté G_τ dans [**9**], défini pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^{\sharp_\beta} = \lambda\}$$

avec $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$. Si x est une place de $\mathbb{Q}$ décomposée $x = yy^c$ dans E alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times,$$

où, en identifiant les places de F^+ au dessus de x avec les places de F au dessus de y, $x = \prod_i z_i$ dans F^+.

1.2. Notation. — *Pour x une place de $\mathbb{Q}$ décomposée dans E et z une place de F^+ au dessus de x, on notera $G(F_z)$ le facteur $(B_z^{op})^\times$ de $G(\mathbb{Q}_x)$ et $G(\mathbb{A}^z)$ pour $G(\mathbb{A})$ auquel on ôte le facteur $(B_z^{op})^\times$. De même pour T un ensemble de places de $\mathbb{Q}$ et $x \in T$, on notera $T - \{z\}$ pour désigner la réunion des places de T distinctes de x avec les places de F, autres que z, au dessus de x.*

Dans [**9**], les auteurs justifient l'existence d'un G comme ci-dessus tel qu'en outre :

— si x est une place de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas décomposée dans E alors $G(\mathbb{Q}_x)$ est quasi-déployé ;
— les invariants de $G(\mathbb{R})$ sont $(1, d-1)$ pour le plongement τ et $(0, d)$ pour les autres.

On fixe à présent un nombre premier $p = uu^c$ décomposé dans E tel qu'il existe une place v de F au dessus de u avec

$$(B_v^{op})^\times \simeq GL_d(F_v).$$

On note $v = v_1, v_2, \cdots, v_r$ les places de F au dessus de u. Pour tout $\underline{m} = (m_1, \cdots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, on pose

$$\underline{m}^v = (0, m_2, \cdots, m_r),$$

et pour tout sous-groupe compact U^p de $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$, on note

$$U_v(\underline{m}) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \mathrm{Ker}\Big(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/\mathcal{P}_{v_i}^{m_i})^\times\Big),$$

ainsi que

$$U^v(\underline{m}) = U_v(\underline{m}^v).$$

1.3. Notation. — *On note* Spl *l'ensemble des places v de F telles que $p_v := v_{|\mathbb{Q}}$ est décomposé dans E et distinct de l, avec*

$$G(\mathbb{Q}_{p_v}) \simeq \mathbb{Q}_{p_v}^\times \times GL_d(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times,$$

où $p_v = v.\prod_{i=2}^r v_i$ dans F^+.

1.4. Notation. — *Pour $v \in$ Spl, on note $\mathcal{I}_v$ l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits »(1) de $G(\mathbb{A}^\infty)$, de la forme $U_v(\underline{m})$. Pour $I = U_v(\underline{m}) \in \mathcal{I}_v$, on note*
- *$I^v = U^v(\underline{m})$,*
- *$n(I) := m_1$, et*
- Spl(I) *l'ensemble des places $w \in$ Spl telles que I est maximal en w.*

1.5. Définition. — Pour $U_v(\underline{m})$ « assez petit », soit $X_{U_v(\underline{m})}/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v$ « la variété de Shimura dite de Kottwitz-Harris-Taylor associée à G » construite dans [**9**].

Remarque : $X_{U_v(\underline{m})}$ est un schéma projectif sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v$ tel que quand U^p et $\underline{m}$ varient, les $X_{U_v(\underline{m})}$ forment un système projectif dont les morphismes de transition sont finis et plats. Quand $m_1 = m_1'$ alors $X_{U_v(\underline{m})} \longrightarrow X_{U_v(\underline{m}')}$ est étale. Par ailleurs le système projectif

$$\Big(X_{U_v(\underline{m})}\Big)_{U^p,\underline{m}}$$

est naturellement muni d'une action de $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$ telle que l'action d'un élément w_v du groupe de Weil W_v de F_v est donnée par celle de $-\deg(w_v) \in \mathbb{Z}$, où $\deg = \mathrm{val} \circ \mathrm{Art}^{-1}$ où $\mathrm{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$ est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

1. tel qu'il existe une place x pour laquelle la projection de $U_v(\underline{m})$ sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [**9**] bas de la page 90

Notons $\mathcal{A}$ la variété abélienne universelle sur $X_{I^v,\bar{s}_v}$ puis $\mathcal{G} := \mathrm{diag}(1,0,\cdots,0).\mathcal{A}[v^\infty]$ le groupe de Barsotti-Tate de dimension 1 associé.

1.6. Notations. — *(cf.* [**2**] *§1.3) Pour $I \in \mathcal{I}_v$, on note :*
- *X_{I,s_v} la fibre spéciale de X_I en v et $X_{I,\bar{s}_v} := X_{I,s_v} \times \mathrm{Spec}\,\bar{\mathbb{F}}_p$ la fibre spéciale géométrique.*
- *Pour tout $1 \leq h \leq d$, $X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}$ (resp. $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur h, i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang $\geq h$ (resp. égal à h).*

1.7. Notations. — *Pour tout $1 \leq h < d$, nous utiliserons les notations suivantes :*

$$i_{h+1} : X^{\geq h+1}_{I,\bar{s}_v} \hookrightarrow X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, \quad j^{\geq h} : X^{=h}_{I,\bar{s}_v} \hookrightarrow X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}.$$

Remarque : par la suite, lors de l'introduction de nouvelles notations relativement à des inclusions géométriques, nous conserverons la convention qu'une lettre i (resp. j) désigne une inclusion fermée (resp. ouverte).

Rappelons que $\mathcal{L} := (\mathrm{Lie}\ \mathcal{G})^\vee$ est un fibré en droite ample sur $X_{I^v,\bar{s}_v}$.

1.8. Théorème. — *(cf.* [**11**]*) Pour tout $1 \leq h \leq d$, il existe un invariant de Hasse généralisé*

$$H_h \in H^0(X^{\geq h}_{I^v,\bar{s}_v}, \mathcal{L}^{(p^h-1)})$$

qui est inversible sur $X^{=h}_{I^v,\bar{s}_v}$ et possède un zéro simple sur $X^{\geq h+1}_{I^v,\bar{s}_v}$.

Remarque : en particulier $X^{=h}_{I^v,\bar{s}_v}$ est affine et régulière.

Pour tout $1 \leq h < d$, les strates $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$ sont géométriquement induites sous l'action du parabolique $P_{h,d}(F_v)$ au sens où il existe un sous-schéma fermé $X^{=h}_{I,\bar{s}_v,1}$ muni d'une action par correspondances de $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times GL_{d-h}(F_v) \times \mathbb{Z}$ tel que :

$$X^{=h}_{I,\bar{s}_v} \simeq X^{=h}_{I,\bar{s}_v,1} \times_{P_{h,d}(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^{n(I)}))} GL_d(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^{n(I)})).$$

1.9. Notation. — *On note $X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,1}$ l'adhérence de $X^{=h}_{I,\bar{s}_v,1}$ dans $X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}$ et*

$$j_1^{\geq h} : X^{=h}_{I,\bar{s}_v,1} \hookrightarrow X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,1}.$$

2. Représentations automorphes cohomologiques

Avant de parler de représentations automorphes, rappelons quelques notations sur les représentations admissibles de GL_n sur un corps local K. Pour $P = MN$ un parabolique standard de GL_n de Lévi M et de radical unipotent N, on note $\delta_P : P(K) \to \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ l'application définie par

$$\delta_P(h) = |\det(\mathrm{ad}(h)_{|\mathrm{Lie}\ N})|^{-1}.$$

Pour (π_1, V_1) et (π_2, V_2) des représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$, et P_{n_1,n_2} le parabolique standard de $GL_{n_1+n_2}$ de Levi $M = GL_{n_1} \times GL_{n_2}$ et de radical unipotent N,

$$\pi_1 \times \pi_2$$

désigne l'induite parabolique normalisée de $P_{n_1,n_2}(K)$ à $GL_{n_1+n_2}(K)$ de $\pi_1 \otimes \pi_2$ c'est à dire l'espace des fonctions $f : GL_{n_1+n_2}(K) \to V_1 \otimes V_2$ telles que

$$f(nmg) = \delta_{P_{n_1,n_2}}^{-1/2}(m)(\pi_1 \otimes \pi_2)(m)\Big(f(g)\Big), \quad \forall n \in N,\ \forall m \in M,\ \forall g \in GL_{n_1+n_2}(K).$$

Rappelons qu'une représentation π de $GL_n(K)$ est dite *cuspidale* si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre.

2.1. Notation. — *Soient g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(K)$. L'unique quotient (resp. sous-représentation) irréductible de $\pi\{\frac{1-s}{2}\} \times \pi\{\frac{3-s}{2}\} \times \cdots \times \pi\{\frac{s-1}{2}\}$ est noté $\mathrm{St}_s(\pi)$ (resp. $\mathrm{Speh}_s(\pi)$).*

Remarque : du point de vue galoisien, via la correspondance de Langlands locale, la représentation $\mathrm{Speh}_s(\pi)$ correspond à la somme directe $\sigma(\frac{1-s}{2}) \oplus \cdots \oplus \sigma(\frac{s-1}{2})$ où σ correspond à π. Plus généralement pour π une représentation irréductible quelconque de $GL_g(K)$ associée à σ par la correspondance de Langlands locale, on notera $\mathrm{Speh}_s(\pi)$ la représentation de $GL_{sg}(K)$ associée, par la correspondance de Langlands locale, à $\sigma(\frac{1-s}{2}) \oplus \cdots \oplus \sigma(\frac{s-1}{2})$.

Rappelons, cf. [**9**] p.97, la paramétrisation des représentations algébriques irréductibles de G sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$. Fixons pour ce faire un plongement $\sigma_0 : E \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l$ et notons Φ l'ensemble des plongements $\sigma : F \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l$ dont la restriction à E est σ_0.

Fait : Il existe une bijection explicite entre les représentations algébriques irréductibles ξ de G sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$ et les $(d+1)$-uplets $\Big(a_0, (\overrightarrow{a_\sigma})_{\sigma \in \Phi}\Big)$ où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\sigma \in \Phi$, on a $\overrightarrow{a_\sigma} = (a_{\sigma,1} \leq \cdots \leq a_{\sigma,d})$.

Soit $K \subset \bar{\mathbb{Q}}_l$, une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ telle que la représentation $\iota^{-1} \circ \xi$ de plus haut poids $\Big(a_0, (\overrightarrow{a_\sigma})_{\sigma \in \Phi}\Big)$, soit définie sur K ; notons $W_{\xi,K}$ l'espace de cette représentation et $W_{\xi,\mathcal{O}}$ un réseau stable sous l'action du sous-groupe compact maximal $G(\mathbb{Z}_l)$, où $\mathcal{O}$ désigne l'anneau des entiers de K.

Remarque : si on suppose que ξ est l-petit, i.e. que pour tout $\sigma \in \Phi$ et pour tout $1 \leq i < j \leq n$, on a $0 \leq a_{\tau,j} - a_{\tau,i} < l$, alors un tel réseau stable est unique à homothétie près.

Notons λ une uniformisante de $\mathcal{O}$ et soit pour $n \geq 1$, un sous-groupe distingué $I_n \in \mathcal{I}_v$ de $I \in \mathcal{I}_v$, compact ouvert agissant trivialement sur $W_{\xi,\mathcal{O}/\lambda^n} := W_{\xi,\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\lambda^n$. On note alors $V_{\xi,\mathcal{O}/\lambda^n}$ le faisceau sur X_I dont les sections sur un ouvert étale $T \longrightarrow X_I$ sont les fonctions

$$f : \pi_0\Big(X_{I_n} \times_{X_I} T\Big) \longrightarrow W_{\xi,\mathcal{O}/\lambda^n}$$

telles que pour tout $k \in I$ et $C \in \pi_0\Big(X_{I_n} \times_{X_I} T\Big)$, on a la relation $f(Ck) = k^{-1} f(C)$.

2.2. Notation. — *On pose alors*

$$V_{\xi,\mathcal{O}} = \varprojlim_n V_{\xi,\mathcal{O}/\lambda^n} \ \textit{et}\ V_{\xi,K} = V_{\xi,\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} K.$$

On utilisera aussi la notation $V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}$ *et* $V_{\xi,\bar{\mathbb{Q}}_l}$ *pour les versions sur* $\bar{\mathbb{Z}}_l$ *et* $\bar{\mathbb{Q}}_l$ *respectivement.*

Remarque : rappelons que la représentation ξ est dite *régulière* si son paramètre $\Big(a_0, (\overrightarrow{a_\sigma})_{\sigma\in\Phi}\Big)$ est tel que pour tout $\sigma \in \Phi$, on a $a_{\sigma,1} < \cdots < a_{\sigma,d}$.

On fixe à présent une $\mathbb{C}$-représentation irréductible algébrique de dimension finie ξ de G.

2.3. Définition. — Une $\mathbb{C}$-représentation irréductible Π_∞ de $G(\mathbb{A}_\infty)$ est dite ξ-cohomologique s'il existe un entier i tel que

$$H^i((\mathrm{Lie}\ G(\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, U_\tau, \Pi_\infty \otimes \xi^\vee) \neq (0)$$

où U_τ est un sous-groupe compact modulo le centre de $G(\mathbb{R})$, maximal, cf. [**9**] p.92. On notera $d^i_\xi(\Pi_\infty)$ la dimension de ce groupe de cohomologie. Une $\bar{\mathbb{Q}}_l$-représentation irréductible Π^∞ de $G(\mathbb{A}^\infty)$ sera dit automorphe ξ-cohomologique s'il existe une $\mathbb{C}$-représentation ξ-cohomologique Π_∞ de $G(\mathbb{A}_\infty)$ telle que $\iota_l\Big(\Pi^\infty\Big)\otimes\Pi_\infty$ est une $\mathbb{C}$-représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$.

2.4. Notation. — *Pour* Π *une représentation irréductible admissible de* $G(\mathbb{A})$*, on note* $m(\Pi)$ *sa multiplicité dans l'espace des formes automorphes.*

Pour Π une représentation automorphe irréductible admissible cohomologique de $G(\mathbb{A})$, rappelons, cf. par exemple le lemme 3.2 de [**5**], que pour x une place de $\mathbb{Q}$ décomposée $x = yy^c$ dans E et z une place de F au dessus de y telle que, avec la notation 1.2, $G(F_z) := (B_z^{op})^\times \simeq GL_d(F_z)$, la composante locale Π_z, au sens de 1.2, est de la forme $\mathrm{Speh}_s(\pi_z)$ pour π_z une représentation irréductible non dégénérée et s un entier ≥ 1 qui ne dépend que de Π et non de la place z comme ci-dessus.

2.5. Définition. — L'entier s ci-avant est appelé la profondeur de dégénérescence de Π.

Remarque : on rappelle qu'un telle représentation Π est dite tempérée si sa profondeur de dégénérescence s est égale à 1.

2.6. Notation. — *Les* $d^i_\xi(\Pi_\infty)$ *sont nuls si* $|d-1-i| \geq s$ *ou si* $d-1-i \equiv s \mod 2$. *Sinon ils sont tous égaux, on note* $d_\xi(\Pi_\infty)$ *la valeur commune non nulle des* $d^i_\xi(\Pi_\infty)$.

3. Rappels sur la $\overline{\mathbb{Q}}_l$-cohomologie d'après [3]

Dans ce paragraphe v désigne une place de F telle que $p_v := v_{|\mathbb{Q}}$ est décomposé dans E distinct de l et $G(\mathbb{Q}_{p_v}) \simeq \mathbb{Q}_{p_v}^\times \times GL_d(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$, où $p_v = v.\prod_{i=2}^r v_i$ dans F^+.

3.1. Notation. — *Pour $1 \leq h \leq d$, on note $\mathcal{I}_v(h)$ l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts de la forme*

$$U_v(\underline{m}, h) := U_v(\underline{m}^v) \times \begin{pmatrix} I_h & 0 \\ 0 & K_v(m_1) \end{pmatrix},$$

où $K_v(m_1) = \mathrm{Ker}\Big(GL_{d-h}(\mathcal{O}_v) \longrightarrow GL_{d-h}(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^{m_1}))\Big)$. La notation $[H^i(h,\xi)]$ (resp. $[H^i_!(h,\xi)]$) désignera l'image de

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ I\in\mathcal{I}_v(h)}} H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,1}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Q}}_l}[d-h]) \qquad \textit{resp.} \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ I\in\mathcal{I}_v(h)}} H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,1}, j^{\geq h}_{1,!} V_{\xi,\bar{\mathbb{Q}}_l}[d-h])$$

dans le groupe de Grothendieck $\mathrm{Groth}(v,h)$ *des représentations admissibles de $G(\mathbb{A}^\infty) \times GL_{d-h}(F_v) \times \mathbb{Z}$.*

Remarques :

(i) comme tous les compacts de $\mathcal{I}_v$ (resp. $\mathcal{I}_v(h)$) contiennent le facteur $\mathbb{Z}_{p_v}^\times$, les représentations Π qui vont intervenir par la suite, dans les différents groupes de cohomologie, devront toutes vérifier que leur composante $\Pi_{p_v,0}$ sur le facteur de similitude $\mathbb{Q}_{p_v}^\times$, est telle $(\Pi_{p_v,0})_{|\mathbb{Z}_{p_v}^\times} = 1$.

(ii) L'action de $\sigma \in W_v$ sur ces $GL_h(F_v)\times\mathbb{Z}$-modules est donnée par celle de $-\deg\sigma \in \mathbb{Z}$ composée avec celle de $\Pi_{p_v,0}(\mathrm{Art}^{-1}(\sigma))$.

(iii) Par ailleurs, on munit ces espaces d'une action de $GL_h(F_v)$ via le morphisme

$$\mathrm{val}\circ\det : GL_h(F_v) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

et enfin une action de $P_{h,d}(F_v)$ via son facteur de Lévi $GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v)$, i.e. en faisant agir trivialement son radical unipotent.

Pour $I_0 \in \mathcal{I}_v(h)$ qui est maximal en v, i.e. $m_1 = 0$, on a

$$H^i(X^{\geq h}_{I_0,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l}) = \Big(\lim_{\substack{\rightarrow \\ I\in\mathcal{I}_v(h)}} H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,1}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Q}}_l})\Big)^{I_0} \tag{3.2}$$

ainsi que

$$H^i(X^{\geq h}_{I_0,\bar{s}_v}, j^{\geq h}_! V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l}) = \Big(\lim_{\substack{\rightarrow \\ I\in\mathcal{I}_v(h)}} H^i(X^{=h}_{I,\bar{s}_v,1}, j^{\geq h}_{1,!} V_{\xi,\bar{\mathbb{Q}}_l})\Big)^{I_0}. \tag{3.3}$$

3.4. Notation. — *Pour $\Pi^{\infty,v}$ une représentation irréductible de $G(\mathbb{A}^{\infty,v})$, on notera* $\mathrm{Groth}(h)\{\Pi^{\infty,v}\}$ *le sous-groupe facteur direct de* $\mathrm{Groth}(v,h)$ *engendré par les irréductibles* *de la forme* $\Pi^{\infty,v}\otimes\pi_{v,et}\otimes\zeta$ *où* $\pi_{v,et}$ *(resp.* ζ*) est une représentation irréductible quelconque de* $GL_{d-h}(F_v)$ *(resp. de* $\mathbb{Z}$*). On notera alors*

$$[H^i(h,\xi)]\{\Pi^{\infty,v}\}$$

la projection de $[H^i(h,\xi)]$ *sur ce facteur direct.*

On écrit

$$[H^i(h,\xi)]\{\Pi^{\infty,v}\}=\Pi^{\infty,v}\otimes\Big(\sum_{\Psi_v,\xi} m_{\Psi_v,\zeta}(\Pi^{\infty,v})\Psi_v\otimes\zeta\Big),$$

où Ψ_v (resp. ξ) décrit l'ensemble des représentations admissibles de $GL_h(F_v)$, (resp. de $\mathbb{Z}$ que l'on voit comme une représentation non ramifiée de W_v).

3.5. Proposition. — *Pour* $\mathcal{P}$ *l'ensemble des nombres premiers de* $\mathbb{Z}$ *et* $I=\otimes_{q\in\mathcal{P}}I_q\in\mathcal{I}_v$ *maximal en* v*, dans le groupe de Grothendieck des représentations de l'algèbre de Hecke* $\otimes_{q\in\mathcal{P}}\overline{\mathbb{Q}}_l[I_q\backslash G(\mathbb{Q}_q)/I_q]$*, on a avec les notations précédentes*

$$[H^{d-h+i}(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v},V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l})]=\sum_{\Pi^{\infty,v}}(\Pi^{\infty,v})^{I^{\infty,v}}\otimes\Big(\sum_{\Psi_v,\xi}m_{\Psi_v,\zeta}(\Pi^{\infty,v})\Big(\mathrm{Speh}_h\,\zeta\times\Psi_v\Big)^{GL_d(\mathcal{O}_v)}\Big).$$

Démonstration. — Le résultat découle directement de (3.2) avec la description de l'action de $GL_d(F_v)$, et du fait que, d'après [**3**], la décomposition de $\varinjlim_{I\in\mathcal{I}_v} H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,1},V_{\xi,\bar{\mathbb{Q}}_l})$ selon ses $\Pi^{\infty,v}$-composantes est semi-simple. □

Remarque : on a une égalité du même style pour la cohomologie à support compact $H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v},j^{\geq h}_!V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l})$.

Les résultats suivants se déduisent directement, dans le cas de la représentation triviale, de la description des groupes de cohomologie des extensions intermédiaires (resp. par zéro) des systèmes locaux d'Harris-Taylor donnés aux §3 (resp. §5) de [**3**]. Le lecteur pourra trouver utile, la réécriture de ces résultats dans [**5**].

3.6. Proposition. — *Soit* Π *une représentation automorphe irréductible* ξ*-cohomologique tempérée. Pour tout* $h=1,\cdots,d$ *et pour tout* $i\neq 0$*,*

$$[H^i(h,\xi)]\{\Pi^{\infty,v}\}\qquad et\qquad [H^i_!(h,\xi)]\{\Pi^{\infty,v}\}$$

sont nuls.

Démonstration. — Le résultat pour $H^i(h,\xi)$ est un cas particulier de la proposition [(2)] 3.6 de [**5**] pour le système local constant, i.e. π_v est la représentation triviale, et $s=1$. Pour la cohomologie à support compact, on peut soit évoquer la proposition 3.12 de [**5**], soit utiliser la description, d'après le corollaire 5.4.1 de [**2**], de cette extension par zéro en termes des systèmes locaux sur les strates de Newton d'indices $h'\geq h$.

□

2. laquelle découle directement de la proposition 3.6.1 de [**3**]

3.7. Proposition. — *Soit* Π *une représentation automorphe irréductible* ξ*-cohomologique non tempérée de profondeur de dégénérescence* $s>1$ *au sens de la définition 2.5. Alors*

(i) *pour tout* $h>s$, *les* $[H^i_!(h,\xi)]\{\Pi^{\infty,v}\}$ *sont nuls pour tout* i *;*

(ii) *pour tout* $h\neq s$, $[H^0_!(h,\xi)]\{\Pi^{\infty,v}\}$ *est nul.*

Démonstration. — Le résultat est donné à la proposition [3] 3.12 de [**5**] en prenant $t=1$. En particulier pour (ii), le résultat découle du fait que, avec les notations de loc. cit., $n_{s,1}(h,0)$ est non nul si et seulement si $h=s$. □

Remarque : dans loc. cit. on montre plus précisément que $[H^i_!(h,\xi)]\{\Pi^{\infty,v}\}\neq(0)$ si et seulement si $i=s-h\geq 0$.

3.8. Notation. — *Soit* $\mathcal{U}_G(\Pi^{\infty,v})$ *l'ensemble des représentations irréductibles automorphes* Π' *de* $G(\mathbb{A})$ *telles que* $(\Pi')^{\infty,v}\simeq\Pi^{\infty,v}$.

Remarque : d'après le corollaire VI.2.2 de [**9**], la composante locale Π'_v d'un $\Pi'\in\mathcal{U}_G(\Pi^{\infty,v})$ ne dépend pas de Π' tel que $d_\xi(\Pi'_\infty)\neq 0$, cf. le corollaire VI.2.2 de [**9**].

On suppose pour la fin de ce paragraphe que Π est une représentation automorphe irréductible ξ-cohomologique tempérée dont la composante locale en v est

$$\Pi_v\simeq \mathrm{St}_{t_1}(\pi_{v,1})\times\cdots\times\mathrm{St}_{t_u}(\pi_{v,u}),$$

où pour $i=1,\cdots,u$, $\pi_{v,i}$ est une représentation irréductible cuspidale de $GL_{g_i}(F_v)$.

3.9. Proposition. — *Avec les notations et les hypothèses précédentes concernant* Π,

— $[H^0(h,\xi)]\{\Pi^{\infty,v}\}$ *est nulle sauf si tous les* $\pi_{v,i}$ *pour* $i=1,\cdots,u$ *sont des caractères.*

— *Dans le cas où pour tout* $i=1,\cdots,u$, $\pi_{v,i}$ *est un caractère de* $F_v^\times$ *que l'on note* $\chi_{v,i}$, *on les ordonne de façon que les* r *premiers correspondent aux non ramifiés. On a alors dans* $\mathrm{Groth}(h)\{\Pi^{\infty,v}\}$, *l'égalité*

$$[H^0(h,\xi)]\{\Pi^{\infty,v}\}=\Big(\frac{\sharp\,\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q},G)}{d}\sum_{\Pi'\in\mathcal{U}_G(\Pi^{\infty,v})}m(\Pi')d_\xi(\Pi'_\infty)\Big)\Big(\sum_{1\leq k\leq r:\ t_k=h}\Pi_v^{(k)}\otimes\chi_{v,k}\Xi^{\frac{d-h}{2}}\Big)$$

où

— $\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q},G)$ *est le sous-ensemble de* $H^1(\mathbb{Q},G)$ *constitué des éléments qui deviennent triviaux dans* $H^1(\mathbb{Q}_{p'},G)$ *pour toute place* p' *de* $\mathbb{Q}$,

— $\Pi_v^{(k)}:=\mathrm{St}_{t_1}(\chi_{v,1})\times\cdots\times\mathrm{St}_{t_{k-1}}(\chi_{v,k-1})\times\mathrm{St}_{t_{k+1}}(\chi_{v,k+1})\times\cdots\times\mathrm{St}_{t_u}(\chi_{v,u})$ *et*

— $\Xi:\frac{1}{2}\mathbb{Z}\longrightarrow\overline{\mathbb{Z}}_l^\times$ *est défini par* $\Xi(\frac{1}{2})=q_v^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration. — Il s'agit à nouveau de la proposition 3.6 de [**5**] avec $s=1$ et π_v la représentation triviale de $F_v^\times$: avec les notation de loc. cit., $R_{\pi_{k,v}}(1,t_k)(h,0)$ disparait i.e. c'est la représentation triviale de $GL_0(F_v)$. □

3. laquelle découle directement des calculs de [**3**] §5

Remarque : à partir de ces descriptions cohomologiques en niveau infini, on retrouve leurs versions en niveau fini, et maximal en v, en utilisant la proposition 3.5. En particulier dans la formule de la proposition, on prend les invariants sous I de $\Pi^{\infty,v} \otimes \Big(\Pi_v^{(k)} \times \mathrm{Speh}_h(\chi_{v,k}) \Big)$.

4. Localisation de la cohomologie

4.1. Notation. — *Pour I un niveau fini, soit*

$$\mathbb{T}_I := \overline{\mathbb{Z}}_l \Big[T_{w,i} : \ w \in \mathrm{Spl}(I) \ \textit{et}\ i = 1, \cdots, d \Big],$$

l'algèbre de Hecke associée à $\mathrm{Spl}(I)$*, où* $T_{w,i}$ *est la fonction caractéristique de*

$$GL_d(\mathcal{O}_w)\, \mathrm{diag}(\overbrace{\varpi_w, \cdots, \varpi_w}^{i}, \overbrace{1, \cdots, 1}^{d-i}) GL_d(\mathcal{O}_w) \subset GL_d(F_w).$$

Le résultat suivant tiré de [**7**] est la relation d'Eichler-Shimura démontrée par Wedhorn dans [**15**], dans le cadre de nos variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor.

4.2. Théorème. — *(cf.* [**7**] *3.3.1) Pour tout* $w \in \mathrm{Spl}(I)$*, l'action de*

$$\sum_{i=0}^{d} (-1)^i q_w^{\frac{i(i-1)}{2}} T_{w,i}\, \mathrm{Frob}_w^{d-i}$$

sur chacun des $H^j(X_{I,\bar\eta}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})$ *est nulle.*

Dans la suite, on fixe une place $v \in \mathrm{Spl}$, un idéal $I \in \mathcal{I}_v$ tel que $I = I^v$ [4] ainsi qu'un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{T}_I$ de corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_l$ tel qu'il existe un entier $1 \leq h \leq d$ et $i \in \mathbb{Z}$ tels que

$$H^i(X^{\geq h}_{I,\bar s_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}} \neq (0). \tag{4.3}$$

Pour tout $w \in \mathrm{Spl}(I)$, on note

$$P_{\mathfrak{m},w}(X) := \sum_{i=0}^{d} (-1)^i q_w^{\frac{i(i-1)}{2}} \overline{T_{w,i}} X^{d-i} \in \overline{\mathbb{F}}_l[X]$$

le polynôme de Hecke associé à $\mathfrak{m}$ et

$$S_{\mathfrak{m}}(w) := \Big\{ \lambda \in \mathbb{T}_I/\mathfrak{m} \simeq \overline{\mathbb{F}}_l \text{ tel que } P_{\mathfrak{m},w}(\lambda) = 0 \Big\},$$

le multi-ensemble des paramètres de Satake modulo l en w associés à $\mathfrak{m}$.
Remarque : on rappelle qu'un multi-ensemble est un couple (A, m) où A est un ensemble appelé le support et $m : A \longrightarrow \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ est la multiplicité au sens où $a \in A$ apparait $m(a)$ fois dans le multi-ensemble (A, m). On dira qu'un multi-ensemble (A, m) est contenu dans (A', m') si et seulement si $A \subset A'$ et pour tout $a \in A$, on a $m(a) \leq m'(a)$.

4. En particulier, on a $v \in \mathrm{Spl}(I)$.

Avec les notations précédentes, l'image $\overline{T_{w,i}}$ de $T_{w,i}$ dans $\mathbb{T}_I/\mathfrak{m}$ s'écrit

$$\overline{T_{w,i}} = q_w^{\frac{i(1-i)}{2}} \sigma_i(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$$

où $S_\mathfrak{m}(w) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_d\}$ et σ_i désigne la i-ème fonction symétrique élémentaire.

4.4. Notation. — *On notera alors* $\mathfrak{m}^\vee$ *l'idéal maximal de* $\mathbb{T}_I$ *défini par*

$$T_{w,i} \in \mathbb{T}_I \mapsto q_w^{\frac{i(1-i)}{2}} \sigma_i(\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_d^{-1}) \in \overline{\mathbb{F}}_l.$$

4.5. Définition. — On définit

$$l_\mathfrak{m}(w;\alpha) := \max\Big\{ s \text{ tel que } \{\alpha, q_w\alpha, \cdots, q_w^{s-1}\alpha\} \subset S_\mathfrak{m}(w) \Big\}$$

et

$$l_\mathfrak{m}(w) := \max_{\alpha \in S_\mathfrak{m}(w)} l_\mathfrak{m}(w;\alpha).$$

Remarque : dans la définition précédente, $\{\alpha, q_w\alpha, \cdots, q_w^{s-1}\alpha\}$ est considéré comme un multi-ensemble et l'inclusion associée est relative aux multi-ensembles. En particulier si $q_w \equiv 1 \mod l$, alors $l_\mathfrak{m}(w;\alpha)$ est simplement la multiplicité de α dans $S_\mathfrak{m}(w)$.

4.6. Lemme. — *Avec les notations précédentes, s'il existe i avec*

$$H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_\mathfrak{m} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \neq (0) \quad \textit{resp. } H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, j_!^{\geq h} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_\mathfrak{m} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \neq (0),$$

alors $l_\mathfrak{m}(v) \geq h$.

Démonstration. — Rappelons que l'action du facteur $GL_h(F_v)$ du Lévi $P_{h,d}(F_v)$ sur $\varinjlim_{I \in \mathcal{I}_v} H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,1}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Q}}_l})$ (resp. $\varinjlim_{I \in \mathcal{I}_v} H^i(X^{=h}_{I,\bar{s}_v,1}, j^{\geq h}_{1,!} V_{\xi,\bar{\mathbb{Q}}_l})$) se factorise par val $\circ$ det : $GL_h(F_v) \longrightarrow \mathbb{Z}$ de sorte que le résultat découle via (3.2) (resp. de (3.3)) de la proposition 3.5, en remarquant que les paramètres de Satake des invariants sous $GL_h(F_v)$ de la représentation triviale $\mathrm{Speh}_h(1_v)$ sont $\{q_v^{\frac{1-h}{2}}, q_v^{\frac{3-h}{2}}, \cdots, q_v^{\frac{h-1}{2}}\}$.

□

4.7. Théorème. — *Si* $l_\mathfrak{m}(v) = 1$ *alors pour toute représentation algébrique* ξ*, la localisation* $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_\mathfrak{m}$ *en* $\mathfrak{m}$ *de la cohomologie de* $V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}$ *est nulle pour* $i \neq d-1$ *et sans torsion, pour* $i = d-1$.

Remarque : dans l'énoncé précédent, il faut voir la place v comme une place auxiliaire au sens où, pour I fixé, dès qu'il existe $v \in \mathrm{Spl}(I)$ avec $I = I^v \in \mathcal{I}_v$ telle que $l_\mathfrak{m}(v) = 1$, alors la localisation de la cohomologie est sans torsion concentrée en degré médian.

Démonstration. — Nous allons montrer par récurrence sur h de d à 2 que les $H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_\mathfrak{m}$ sont nuls : d'après le lemme précédent c'est déjà vrai pour les parties libres, il ne reste donc plus qu'à considérer la torsion de ces groupes. Pour $h = d$, les $H^i(X^{\geq d}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})$ sont nuls pour $i \neq 0$ et sans torsion pour $i = 0$, le résultat découle donc du lemme précédent.

Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $h+1$ et traitons le cas de $h \geq 2$. Considérons la suite exacte courte de faisceaux pervers sans torsion [5]

$$0 \to i_{h+1,*} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h+1}_{I,\bar{s}_v}}[d-h-1] \longrightarrow j^{\geq h}_! j^{\geq h,*} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}}[d-h] \longrightarrow V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}}[d-h] \to 0.$$

Il résulte du théorème d'Artin, cf. par exemple le théorème 4.1.1 de [**1**] et, donc, de l'affinité des strates $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$ d'après le théorème 1.8, que les $H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, j^{\geq h}_! j^{\geq h,*} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}}[d-h])$ sont nuls pour $i<0$ et sans torsion pour $i=0$, de sorte que pour $i>0$, on a

$$0 \to H^{-i-1}(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \longrightarrow H^{-i}(X^{\geq h+1}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h-1]) \to 0, \tag{4.8}$$

et pour $i=0$,

$$\begin{aligned} 0 \to H^{-1}(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \longrightarrow H^0(X^{\geq h+1}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h-1]) \longrightarrow \\ H^0(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, j^{\geq h}_! j^{\geq h,*} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \longrightarrow H^0(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \to \cdots \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ainsi après localisation en $\mathfrak{m}$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient que les $H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h])_{\mathfrak{m}}$ sont nuls pour $i<0$ et sans torsion pour $i=0$. En utilisant que la propriété $l_{\mathfrak{m}}(v)=1$ est invariante par dualité, i.e.

$$l_{\mathfrak{m}}(v)=1 \Leftrightarrow l_{\mathfrak{m}^\vee}(v)=1,$$

on en déduit alors par application de la dualité de Verdier que les $H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h])_{\mathfrak{m}}$ sont nuls pour $i \neq 0$ et sans torsion pour $i=0$. On est ainsi ramener sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ en degré médian où le résultat découle du lemme précédent.

Les mêmes arguments appliqués au cas $h=1$, nous donnent que les $H^i(X_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ sont nuls pour $i \neq d-1$ et sans torsion pour $i=d-1$. Le théorème de changement de base lisse fournit $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}) \simeq H^i(X^{\geq 1}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})$, d'où le résultat.

□

Une analyse plus fine de la preuve précédente permet d'obtenir la précision suivante.

4.10. Proposition. — *Soit $i \geq 0$ tel que la torsion de $H^{-i}(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$ est non nulle. On a alors $l_{\mathfrak{m}}(v) \geq i+2$.*

Remarque : l'inégalité évidente $l_{\mathfrak{m}}(v) \leq d$, nous donne en particulier que la torsion de $H^0(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ est nulle ; on peut donc comprendre l'énoncé précédent comme une généralisation de ce fait élémentaire.

Démonstration. — Notons $r = l_{\mathfrak{m}}(v)$. En reprenant la preuve du théorème précédent, on obtient que les $H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h])_{\mathfrak{m}}$ sont nuls pour tout i (resp. $i \neq 0$ et sans torsion pour $i=0$) tant que $h>r$ (resp. pour $h=r$). Montrons à présent par récurrence sur h de r à 1 que les $H^{-i}(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h])_{\mathfrak{m}}$ sont nuls pour $i>r-h$ et sans torsion pour $i=r-h$.

5. Les strates $X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}$ étant lisses et $j^{\geq h}$ étant affine, les trois termes de la suite exacte sont pervers et sont libres au sens de la théorie de torsion naturelle issue de la structure $\overline{\mathbb{Z}}_l$-linéaire, cf. [**4**] §1.1-1.3.

D'après les isomorphismes de (4.8), on voit que la nullité de $H^{-i}(X^{\geq h+1}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h-1])_{\mathfrak{m}}$ pour tout $i > r-h-1$ donne celle de $H^{-i}(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-h])_{\mathfrak{m}}$ pour tout $i > r-h$. Le résultat de l'énoncé découle, par contraposition, du cas $h=1$ et du changement de base lisse.

□

Dans l'argument précédent on voit que la torsion peut apparaître, par exemple, à cause de la flèche

$$H^0(X^{\geq r}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq r}_{I,\bar{s}_v}}[d-r]) \hookrightarrow H^0(X^{\geq r-1}_{I,\bar{s}_v}, j^{\geq r-1}_! j^{\geq r-1,*} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq r-1}_{I,\bar{s}_v}}[d-r+1])$$

entre deux $\overline{\mathbb{Z}}_l$-modules libres à priori non nuls. Les exemples de l'introduction où la torsion est non nulle, illustrent le fait que pour certains $\mathfrak{m}$, l'injection précédente est non stricte.
Remarque : Sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, d'après la proposition 3.7, la $\{\Pi^{\infty,v}\}$-composante d'une telle flèche est nulle si Π n'est pas tempérée.

4.11. Définition. — Pour $1 \leq \delta \leq l_{\mathfrak{m}}(v)$, on définit

$$\mu_{\mathfrak{m}}(v;\delta) = \sharp\Big\{\alpha \in S_{\mathfrak{m}}(v) : \ l_{\mathfrak{m}}(v;\alpha) \geq \delta.\Big\}.$$

Supposons que $\mathfrak{m}$ et ξ sont tels qu'il existe $i \leq 0$ tel que la torsion de $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$ est non nulle.

4.12. Notation. — *Soit $i_{\mathfrak{m},\xi} \geq 0$ maximal tel que pour tout $i < -i_{\mathfrak{m},\xi}$, la torsion de $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$ est nulle.*

4.13. Lemme. — *Pour tout $1 \leq h \leq 1+i_{\mathfrak{m},\xi}$, le localisé $H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}}[d-h])_{\mathfrak{m}}$ est sans torsion pour $i < h-1-i_{\mathfrak{m},\xi}$ et de torsion non nulle pour $i = h-1-i_{\mathfrak{m},\xi}$.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur h de 1 à $1+i_{\mathfrak{m},\xi}$: le cas $h=1$ découle de la définition de $i_{\mathfrak{m},\xi}$ et du changement de base lisse. La propriété d'inductivité de $h-1$ à h se déduit alors des isomorphismes (4.8) localisés en $\mathfrak{m}$ et, pour $h = 1+i_{\mathfrak{m},\xi}$, de la suite exacte longue (4.9).

□

4.14. Proposition. — *L'action du Frobenius* Frob_v *sur le $\overline{\mathbb{F}}_l$-espace*

$$H^{-i_{\mathfrak{m},\xi}}_{tor}(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$$

admet au plus $\mu_{\mathfrak{m}}(v; i_{\mathfrak{m},\xi}+2)$ valeurs propres distinctes.

Remarque : comme précédemment la proposition ci-dessus est valable pour toute place v telle que $I = I^v \in \mathcal{I}_v$.

Démonstration. — Continuons les arguments de la preuve du lemme précédent pour les $h > 1+i_{\mathfrak{m},\xi}$. Des isomorphismes (4.8) et de la suite exacte (4.9), on en déduit, par récurrence sur $h > 1+i_{\mathfrak{m},\xi}$, que les $H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}}[d-h])_{\mathfrak{m}}$ sont sans torsion pour tout $i \leq 0$. En outre pour $h = 1+i_{\mathfrak{m},\xi}$, la torsion de $H^0(X^{\geq 1+i_{\mathfrak{m},\xi}}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1-i_{\mathfrak{m},xi}])_{\mathfrak{m}}$ s'obtient comme celle du conoyau

$$H^0(X^{\geq 2+i_{\mathfrak{m},\xi}}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-2-i_{\mathfrak{m},\xi}])_{\mathfrak{m}} \longrightarrow H^0(X^{\geq 1+i_{\mathfrak{m},\xi}}_{I,\bar{s}_v}, j^{\geq 1+i_{\mathfrak{m},\xi}}_! j^{\geq 1+i_{\mathfrak{m},\xi},*} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1-i_{\mathfrak{m},\xi}])_{\mathfrak{m}}.$$

En utilisant les isomorphismes (4.8) respectivement pour $h = i_{\mathfrak{m},\xi}, \cdots, 1$ avec $i = i_{\mathfrak{m},\xi} - h$, on obtient que la torsion de $H^{-i_{\mathfrak{m},\xi}}(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$ s'obtient comme celle du conoyau du morphisme précédent.

Ainsi d'après la proposition 3.7, et en utilisant la remarque (ii) qui suit 3.1, les valeurs propres de Frob_v cherchées sont à prendre dans la réduction modulo l des $[H^0(2+i_{\mathfrak{m},\xi}, \xi)]\{\Pi^{\infty,v}\}$, pour Π tempérée d'après la remarque précédant 4.11, telles que pour tout $v \in \mathrm{Spl}(I)$, les paramètres de Satake en v modulo l sont donnés par $\mathfrak{m}$. Pour une telle représentation Π avec, cf. la proposition 3.9,

$$\Pi_v \simeq \mathrm{St}_{t_1}(\chi_{v,1}) \times \cdots \times \mathrm{St}_{t_u}(\chi_{v,u}),$$

avec les notations de la proposition 3.9, pour avoir des vecteurs invariants sous $GL_{d-2-i_{\mathfrak{m},\xi}}(\mathcal{O}_v)$, il faut

— qu'il existe $1 \leq k \leq u$ tel que $t_k = 2+i_{\mathfrak{m},\xi}$,

— que pour tout $1 \leq i \neq k \leq u$, on ait $t_i = 1$ et

— que les caractères $\chi_{v,1}, \cdots, \chi_{v,u}$ soient non ramifiés.

Pour un tel Π, d'après la proposition 3.9, la valeur propre de Frob_v associée est $\chi_{v,k}(\varpi_v) q_v^{\frac{d-i_{\mathfrak{m},\xi}-2}{2}}$, et d'après la proposition 3.5, le multi-ensemble des paramètres de Satake est

$$\Big\{ \chi_{v,1}(\varpi_v), \cdots, \chi_{v,k-1}(\varpi_v), \chi_{v,k}(\varpi_v) q_v^{-\frac{i_{\mathfrak{m},\xi}+1}{2}}, \chi_{v,k}(\varpi_v) q_v^{-\frac{i_{\mathfrak{m},\xi}-1}{2}}, \cdots, \chi_{v,k}(\varpi_v) q_v^{\frac{1+i_{\mathfrak{m},\xi}}{2}}, \chi_{v,k+1}(\varpi_v), \cdots, \chi_{v,u}(\varpi_v) \Big\}.$$

En particulier modulo l, ce multi-ensemble de paramètres de Satake contient un sous-multi-ensemble de la forme $\{\alpha, q_v\alpha, \cdots, q_v^{1+i_{\mathfrak{m},\xi}}\alpha\}$. On obtient ainsi, par définition, au plus $\mu_{\mathfrak{m}}(v; i_{\mathfrak{m},\xi}+2)$ valeurs propres de Frobenius distinctes.

□

4.15. Corollaire. — *On suppose $l \geq d+2$ et supposons que l'ordre de q_v modulo l soit $> d$. Si ρ est une $\overline{\mathbb{F}}_l$-sous-représentation galoisienne irréductible dans la torsion de*

$H^{-i_{\mathfrak{m},\xi}}(X_{I,\bar\eta}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$ *telle que les valeurs propres de* Frob_v *sont distinctes alors*

$$\dim \rho \leq d-1-i_{\mathfrak{m},\xi}.$$

Remarque : en particulier on retrouve un phénomène bien connu en caractéristique nulle, à savoir que la dimension chute à mesure qu'on s'éloigne du degré médian.

Démonstration. — Notons V (resp. S) l'ensemble des valeurs propres de $q_v^{-\frac{d-i_{\mathfrak{m},\xi}-2}{2}}\rho(\mathrm{Frob}_w)$ (resp. les paramètres de Satake modulo l associés à $\mathfrak{m}$). D'après la proposition précédente si $\lambda \in V$ alors $\{\lambda, q_v\lambda, \cdots, q_v^{i_{\mathfrak{m},\xi}+1}\lambda\} \subset S$. En particulier, les valeurs propres étant supposées distinctes, on a $V \subset S$ et donc le cardinal de V est $\leq d$. Notons alors que, comme l'ordre de q_v est $> d$, alors q_vV n'est pas inclus dans V : en effet sinon on aurait $q_v^nV \subset V$ et V contiendrait un ensemble de la forme $\{\alpha, q_v\alpha, \cdots, q_v^d\alpha\}$ ce qui n'est pas car V est de cardinal $\leq d$. Prenons alors $\lambda_0 \in V$ tel que $\lambda_0 q_v \notin V$, i.e. $\lambda_0 q_v^{2+i_{\mathfrak{m},\xi}} \notin S$. On en déduit alors que pour tout $k = 1, \cdots, 1+i_{\mathfrak{m},\xi}$, l'élément $\lambda_0 q_v^k$ appartient à S mais pas à V, d'où le résultat. $\square$

Le résultat suivant est l'analogue, dans le cadre restrictif des variétés de Shimura simples de Kottwitz-Harris-Taylor, du théorème principal de [**13**], cf. aussi le théorème 6.3.1 de [**6**].

4.16. Théorème. — *Soit* $\mathfrak{m}$ *vérifiant (4.3), il existe alors une représentation continue*

$$\overline{\rho}_{\mathfrak{m}} : G_F \longrightarrow GL_d(\overline{\mathbb{F}}_l)$$

non ramifiée à toutes les places ne divisant pas I *et telle que pour tout* $w \in \mathrm{Spl}(I)$*, le polynôme caractéristique de* $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Frob}_w)$ *est*

$$P_{\mathfrak{m},w}(X) := \sum_{i=0}^{d}(-1)^i q_w^{\frac{i(i-1)}{2}}\overline{T_{w,i}}X^{d-i} \in \mathbb{T}_I/\mathfrak{m} \simeq \overline{\mathbb{F}}_l.$$

Démonstration. — On choisit une place v telle que, avec les notations précédentes, $I = I^v \in \mathcal{I}_v$, et on reprend la preuve du théorème 4.7. Afin de formaliser l'argument introduisons la notion suivante : on dira d'un $\mathbb{T}_I$-module M qu'il vérifie la propriété **(P)**, s'il admet une filtration finie

$$(0) = \mathrm{Fil}^0(M) \subset \mathrm{Fil}^1(M) \cdots \subset \mathrm{Fil}^r(M) = M$$

telle que pour tout $k = 1, \cdots, r$, il existe

- une représentation automorphe Π_k irréductible et entière de $G(\mathbb{A})$, apparaissant dans la cohomologie de $X_{\mathcal{I},\bar\eta_v}$ à coefficients dans $V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l}$,
- une représentation irréductible entière $\widetilde{\Pi}_{k,v}$ de même support cuspidal que $\Pi_{k,v}$
- et un $\mathbb{T}_I$-réseau stable Γ de $(\Pi_k^{\infty,v})^{I^v} \otimes \widetilde{\Pi}_{k,v}^{GL_d(\mathcal{O}_v)}$ tel que
  - soit $\mathrm{gr}^k(M)$ est libre et isomorphe à Γ,
  - soit $\mathrm{gr}^k(M)$ est de torsion et un sous-quotient de Γ/Γ' pour $\Gamma' \subset \Gamma$ un deuxième $\mathbb{T}_I$-réseau stable.

La propriété **(P)** est clairement stable par extensions, par sous-quotients et, en remplaçant la condition ξ-cohomologique par $\xi^\vee$-cohomologique, par dualité.

Pour un tel $\mathbb{T}_I$-module M et pour tout k tel que $\mathrm{gr}^k(M)$ non nul, le système de paramètres de Satake modulo l de $\mathrm{gr}^k(M) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$ est la réduction modulo l d'un système sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$ associé à une représentation automorphe apparaissant dans la cohomologie de $X_{\mathcal{I},\bar{\eta}_v}$ à coefficients dans $V_{\xi,\overline{\mathbb{Q}}_l}$. D'après [**9**] à cette représentation automorphe est associée une représentation galoisienne dont la réduction modulo l sera telle qu'aux places non ramifiées, les frobenius auront pour valeurs propres les paramètres de Satake modulo l donnés en une telle place par $\mathrm{gr}^k(M) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$. Ainsi il suffit de montrer que les $H^i(X^{\geq 1}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})$ vérifient la propriété **(P)**.

Pour ce faire nous allons montrer par récurrence sur h de d à 1, que les $H^i(X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})$ vérifient la propriété **(P)**. On sait déjà que c'est le cas pour les parties libres, cf. la proposition 3.9, et donc c'est vrai pour $h=d$. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $h+1$ et considérons la suite exacte courte

$$0 \to i_{h+1,*} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h+1}_{I,\bar{s}_v}}[d-h-1] \longrightarrow j^{\geq h}_! j^{\geq h,*} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}}[d-h] \longrightarrow V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}}[d-h] \to 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, les groupes de cohomologie de $i_{h+1,*} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h+1}_{I,\bar{s}_v}}[d-h-1]$ vérifient **(P)** ainsi que ceux de $j^{\geq h}_! j^{\geq h,*} V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}}[d-h]$ en degré $i \leq 0$ puisqu'ils sont soit nuls pour $i<0$, soit sans torsion pour $i=0$. On en déduit alors que les groupes de cohomologie de $V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l,|X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}}[d-h]$ vérifient **(P)** en degré $i \leq 0$ et donc, par dualité, pour tout i.

□

Remarque : moralement notre preuve est dans l'esprit très proche de celle du théorème 6.3.1 de [**6**], i.e. toute classe de torsion dans la cohomologie de X_I se relève en caractéristique nulle dans la cohomologie en degré médian d'une variété d'Igusa.(6) En particulier on n'obtient pas de « nouveaux » systèmes de paramètres de Satake, ce qui d'après [**6**] semble être un phénomène partagé par les variétés de Shimura contrairement à ce qui se passe dans le cas général, cf. [**13**].

4.17. Hypothèse. — *Si* $\theta : G_F \longrightarrow GL_n(\overline{\mathbb{F}}_l)$ *est une représentation irréductible continue telle que pour tout* $v \in \mathrm{Spl}(I)$, *on a*

$$P_{\mathfrak{m},v}(\theta(\mathrm{Frob}_v)) = 0 \qquad \textit{resp. } P_{\mathfrak{m}^\vee,v}(\theta(\mathrm{Frob}_v)) = 0$$

alors θ *est équivalent à* $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ *(resp. à* $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}^\vee}$*).*

Remarque : d'après [**7**], l'hypothèse 4.17 est vérifiée si

— soit $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est induit d'un caractère de G_K pour K/F une extension galoisienne cyclique ;

6. Pour une telle propriété le choix de la place $v \in \mathrm{Spl}(I)$ est libre et il n'est pas difficile de généraliser ce fait pour toute place $v \in \mathrm{Spl}$.

— soit $l \geq d$ et $SL_d(k) \subset \overline{\rho}_{\mathfrak{m}}(G_F) \subset \overline{\mathbb{F}}_l^\times GL_d(k)$ pour un sous-corps $k \subset \overline{\mathbb{F}}_l$.

4.18. Théorème. — *Supposons que $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ vérifie l'hypothèse 4.17 et que $l \geq d+2$. Alors les $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$ sont sans torsion.*

Remarque : on obtient ainsi une version améliorée du théorème 3.4.2 de [**7**].

Démonstration. — En utilisant le fait que $\mathfrak{m}^\vee$ vérifie, par hypothèse, la même condition que $\mathfrak{m}$, il suffit de montrer que les $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$ ou de manière équivalente, que les $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}^\vee}$, sont sans torsion pour $i \leq 0$: en effet s'il existait $i > 0$ tel que la torsion de $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$ était non nulle, alors par dualité celle de $H^{-i+1}(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}^\vee}$ serait aussi non nulle.

On raisonne alors par l'absurde et on note comme précédemment $i_{\mathfrak{m},\xi} \geq 0$ le plus grand indice i tel que la torsion de $H^{-i}(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$ est non nulle. Soit alors θ une représentation de G_F obtenue comme sous-quotient irréductible de la torsion de $H^{-i_{\mathfrak{m},\xi}}(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$. D'après la relation de congruence 4.2 et l'hypothèse précédente, on en déduit que θ est isomorphe à $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ et que donc, pour tout $v \in \mathrm{Spl}(I)$, les valeurs propres de $\theta(\mathrm{Frob}_v)$ correspondent aux paramètres de Satake modulo l donnés par $\mathfrak{m}$, à multiplication par $q_v^{\frac{d-1}{2}}$ près.

Comme $l-1 > d$, on choisit $v \in \mathrm{Spl}(I)$ tel que l'ordre de $v_{|\mathbb{Q}}$ modulo l est $> d$. Soit alors $q_v^{\frac{d-1}{2}}\lambda$ une valeur propre de Frob_v agissant sur la torsion de $H^{-i_{\mathfrak{m},\xi}}(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$: la réduction modulo l de λ est un paramètre de Satake modulo l de $\mathfrak{m}$. D'après la preuve de la proposition 4.14, il existe alors une représentation automorphe Π dont la composante Π_v est de la forme

$$\Pi_v \simeq \mathrm{St}_{2+i_{\mathfrak{m},\xi}}(\chi_{v,1}) \times \chi_{v,2} \times \cdots \times \chi_{v,u},$$

pour $\chi_{v,1}, \cdots, \chi_{v,u}$ des caractères non ramifiés de $F_v^\times$, et avec $\lambda = \chi_{v,1}(\varpi_v) q_v^{-\frac{i_{\mathfrak{m},\xi}+1}{2}}$. Les paramètres de Satake modulo l sont alors donnés par

$$\Big\{\chi_{v,1}(\varpi_v) q_v^{-\frac{i_{\mathfrak{m},\xi}+1}{2}}, \chi_{v,1}(\varpi_v) q_v^{-\frac{i_{\mathfrak{m},\xi}-1}{2}}, \cdots, \chi_{v,1}(\varpi_v) q_v^{\frac{i_{\mathfrak{m},\xi}+1}{2}}, \chi_{v,2}(\varpi_v), \cdots \chi_{v,u}(\varpi_v)\Big\}.$$

En particulier, on remarque que si λ est un paramètre de Satake modulo l de $\mathfrak{m}$ à la place v alors $q_v\lambda$ aussi. Comme par hypothèse l'ordre de q_v modulo l est $> d$, alors $q_v^i\lambda$ serait un paramètre de Satake modulo l de $\mathfrak{m}$ à la place v, pour tout $i = 0, \cdots, d$, ce qui donnerait $d+1$ paramètres distincts ce qui ne se peut pas, d'où la contradiction.

□

Références

[1] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne, *Faisceaux pervers*, in Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), vol. 100 of Astérisque, Soc. Math. France, Paris, 1982, pp. 5–171.

[2] P. Boyer, *Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples*, Invent. Math., 177 (2009), pp. 239–280.

[3] ——, *Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications*, Compositio, 146 (2010), pp. 367–403.

[4] ——, *Filtrations de stratification de quelques variétés de Shimura simples*, Bulletin de la SMF, 142, fascicule 4 (2014), pp. 777–814.

[5] ——, *Congruences automorphes et torsion dans la cohomologie d'un système local d'Harris-Taylor*, Annales de l'Institut Fourier, 65 no. 4 (2015), pp. 1669–1710.

[6] A. Caraiani and P. Scholze, *On the generic part of the cohomology of compact unitary Shimura varieties*, Preprint, (2015).

[7] M. Emerton and T. Gee, *p-adic Hodge theoretic properties of étale cohomology with mod p coefficients, and the cohomology of Shimura varieties*, Algebra and Number Theory, (to appear).

[8] M. Emerton, T. Gee, and F. Herzig, *Weight cycling and Serre-type conjectures for unitary groups*, Duke Mathematical Journal, 162, no. 9 (2013), pp. 1649–1722.

[9] M. Harris, R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, vol. 151 of Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[10] F. Herzig, *The weight in a serre-type conjecture for tame n-dimensional Galois representations*, Duke Mathematical Journal, 149, no. 1 (2009), pp. 37–116.

[11] T. Ito, *Hasse invariants for somme unitary Shimura varieties*, Math. Forsch. Oberwolfach report 28/2005, (2005), pp. 1565–1568.

[12] K.-W. Lan and J. Suh, *Vanishing theorems for torsion automorphic sheaves on compact PEL-type Shimura varieties*, Duke Math., 161 (2012), pp. 951–1170.

[13] P. Scholze, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, Ann. of Math. (2), 182 (2015), pp. 945–1066.

[14] J. Suh, *Plurigenera of general type surfaces in mixed characteristic*, Compos. Math., 144 no. 5 (2008), pp. 1214–1226.

[15] T. Wedhorn, *Congruence relations on some Shimura varieties*, J. Reine Angew. Math., 524 (2000), pp. 43–71.

Pascal Boyer, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse (France), PerCoLaTor : ANR-14-CE25 • *E-mail :* boyer@math.univ-paris13.fr